Notions relatives aux champs

Ce document est un préalable indispensable à l'étude de l'électromagnétisme. Il ne prétend pas remplacer les cours de mathématiques relatifs à ces notions, mais il a pour but de faciliter la mémorisation des expressions utiles au physicien.
En effet, l'intérêt de ces notions de mathématiques provient du fait que dans de nombreux domaines de la physique (mécanique, électromagnétisme, transfert thermique par conduction), les lois fondamentales s'expriment sous formes de relations locales.

I - Coordonnées orthogonales :

1) Coordonnées cartésiennes :

- Soit un point $M(x,y,z)$ dans la base $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$
- Le déplacement élémentaire est $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}$

2) Coordonnées cylindriques :

- Soit un point $M(r,\theta,z)$ dans la base $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{e_z}$ avec $\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$
- Le déplacement élémentaire est $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}$

3) Coordonnées sphériques :

- Soit un point $M(r,\theta,\varphi)$ dans la base $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ avec $\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$ où θ est la colatitude
- Le déplacement élémentaire est $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi}$

II - Les opérateurs :

1) L'opérateur nabla :

- Nabla associe à un champ ses dérivées partielles
- $\vec{\nabla}(\ldots) = (\frac{\partial ..}{\partial x}, \frac{\partial ..}{\partial y}, \frac{\partial ..}{\partial z})$

2) L'opérateur gradient :

- Le gradient agit sur un champ scalaire pour obtenir un champ vectoriel
- $\vec{\nabla} f = \overrightarrow{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$

3) L'opérateur divergence :

- La divergence agit sur un champ vectoriel pour obtenir un champ scalaire
- $\vec{\nabla}.\vec{u} = \overrightarrow{div}.\vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$

4) L'opérateur rotationnel :

- Le rotationnel agit sur un champ vectoriel pour obtenir un champ vectoriel
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{rot} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{vmatrix}$

5) L'opérateur laplacien scalaire :

- Le laplacien scalaire agit sur un champ scalaire pour obtenir un champ scalaire
- $\vec{\nabla}^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

6) L'opérateur laplacien vectoriel :

- Le laplacien vectoriel agit sur un champ vectoriel pour obtenir un champ vectoriel
- $\vec{\nabla}^2 . \vec{u} = \Delta \vec{u} = \begin{matrix} \vec{\nabla}^2 U_x \\ \vec{\nabla}^2 U_y \\ \vec{\nabla}^2 U_z \end{matrix}$

7) Formules relatives aux opérateurs :

- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} f) = \vec{0}$
- $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{rot}\vec{u}) = 0$
- $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{grad} f) = \Delta f$
- $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}(\vec{u}) = \overrightarrow{grad}(\overrightarrow{div}\vec{u}) - \Delta\vec{u}$
- $\overrightarrow{rot}(f\vec{u}) = \overrightarrow{grad}(f) \wedge \vec{u} + f\overrightarrow{rot}\vec{u}$
- $\overrightarrow{div}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v}.\overrightarrow{rot}\vec{u} - \vec{u}.\overrightarrow{rot}\vec{v}$
- $\overrightarrow{div}(f\vec{u}) = \vec{u}.\overrightarrow{grad}(f) + f\overrightarrow{div}\vec{u}$

III – Transformations d'intégrales (théorèmes d'analyse vectorielle)

1) Transformation d'une circulation en un flux :

- Théorème de Stockes – Ampère : $\int \vec{u}\overrightarrow{dl} = \iint (\overrightarrow{rot}\vec{u}).\overrightarrow{dS}$

2) Transformation d'un flux en une intégrale de volume :

- Théorème de Green – Ostrogradski : $\iint \vec{u}\overrightarrow{dS} = \iiint (\overrightarrow{div}\vec{u})d\tau$

IV – Expression des opérateurs dans différentes coordonnées :

	Coordonnées cartésiennes $M(x,y,z)$	**Coordonnées cylindriques** $M(r,\theta,z)$	**Coordonnées sphériques** $M(r,\theta,\varphi)$
Gradient	$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$	$\frac{\partial f}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta},\frac{\partial f}{\partial z}$	$\frac{\partial f}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta},\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial}$
Divergence	$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 u_r}{\partial r}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta u_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}$
Rotationnel	$\begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\frac{\vec{e_r}}{r} & \vec{e_\theta} & \frac{\vec{e_z}}{r}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_r & r u_\theta & u_z\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\frac{\vec{e_r}}{r^2\sin\theta} & \frac{\vec{e_\theta}}{r\sin\theta} & \frac{\vec{e_\varphi}}{r}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi}\\ u_r & r u_\theta & r\sin\theta u_\varphi\end{vmatrix}$